MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
A. Ribelles, D. Rost

WS 2019/20
Blatt 1
21.10.2019

Tutorium zur Vorlesung „Mathematik im Querschnitt“ -Bearbeitungsvorschlag-

1. a) Die Funktion f ist stetig, denn sie besteht aus der Differenz, der Komposition mit dem Betrag (die Betragsfunktion ist ebenfalls stetig) und dem Produkt von stetigen Koordinatenprojektionen.

   b) Die Funktion f ist **nicht** stetig in $(0,0)$, denn es ist

$$(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (0,0),$$

aber

$$f(x_k, y_k) = f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right) = \frac{\frac{1}{k}\cdot\frac{1}{k}}{(\frac{1}{k})^4 + (\frac{1}{k})^2} = \frac{1}{(\frac{1}{k})^2 + 1} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 0 = f(0,0).$$

Die Funktion g ist **nicht** stetig in $(0,0)$, denn es ist

$$(x_k, y_k) = \left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} (0,0),$$

aber

$$f(x_k, y_k) = f\left(\frac{1}{k}, \frac{1}{k^2}\right) = \frac{(\frac{1}{k})^2\cdot\frac{1}{k^2}}{(\frac{1}{k})^4 + (\frac{1}{k^2})^2} = \frac{(\frac{1}{k})^4}{2(\frac{1}{k})^4} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0,0).$$

2. Seien

$$D_1 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2=1,\, y\geq 0\} \subset \partial D \subset D \qquad \text{(obere Kreislinie)}$$

und

$$D_2 := \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2=1,\, y\leq 0\} \subset \partial D \subset D \qquad \text{(untere Kreislinie).}$$

Wir parametrisieren D_1 durch

$$\varphi_1 : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi_1(t) = (\cos t, \sin t),$$

und betrachten die Funktion

$$h : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = f(\varphi_1(t)).$$

Da φ_1 und f stetig, ist h stetig, und es gilt $h(0) = f(1,0) = 1 > 0$ sowie $h(\pi) = f(-1,0) = -1 < 0$. Nach dem Nullstellensatz gibt es also ein $t_1 \in]0,\pi[$ mit $h(t_1) = f(\varphi_1(t_1)) = 0$. Der Punkt $c_1 := \varphi_1(t_1)$ mit $f(c_1) = 0$ liegt wegen $t_1 \in]0,\pi[$ auf $D_1\backslash D_2$.

Wir parametrisieren nun D_2 durch

$$\varphi_2 : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi_1(t) = (\cos(-t), \sin(-t)),$$

und betrachten die Funktion

$$h : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}, \quad h(t) = f(\varphi_2(t)).$$

Da φ_2 und f stetig, ist h stetig, und es gilt $h(0) = f(1,0) = 1 > 0$ sowie $h(\pi) = f(-1,0) = -1 < 0$. Nach dem Nullstellensatz gibt es also ein $t_2 \in]0,\pi[$ mit $h(t_2) = f(\varphi_2(t_2)) = 0$. Der Punkt $c_2 := \varphi_2(t_2)$ mit $f(c_2) = 0$ liegt wegen $t_2 \in]0,\pi[$ auf $D_2 \backslash D_1$.

Also hat f auf ∂D (mindestens) zwei Nullstellen.

Bemerkung: Etwas kürzer geht es mit Satz 10.9 bzw. (10.9) der Vorlesung Diff II (vom SS 19): Es ist D_1 zusammenhängend und die Einschränkung $f_1 := f|_{D_1}$ von f auf D_1 stetig (weil f stetig) mit $f_1(1,0) = f(1,0) > 0$ und $f_1(-1,0) = f(-1,0) < 0$. Also gibt es nach (10.9) ein $c_1 \in D_1$ mit

$$f_1(c_1) = f(c_1) = 0.$$

Weil $f(1,0) \neq 0$ und $f(-1,0) \neq 0$, ist $c_1 \in D_1 \backslash D_2$.

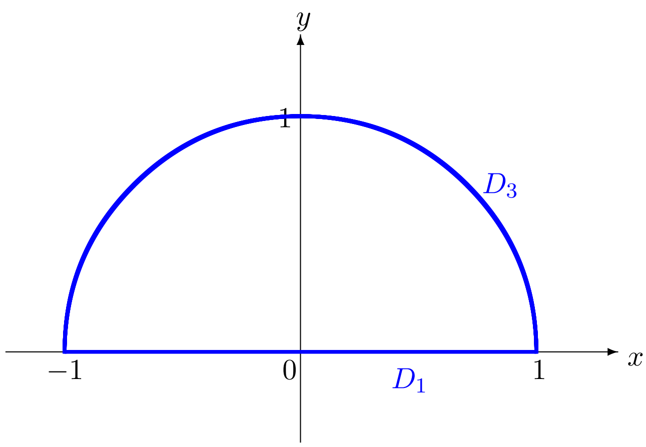
Es ist D_2 zusammenhängend und die Einschränkung $f_2 := f|_{D_2}$ von f auf D_2 stetig (weil f stetig) mit $f_2(1,0) = f(1,0) > 0$ und $f_2(-1,0) = f(-1,0) < 0$. Also gibt es nach (10.9) ein $c_2 \in D_2$ mit

$$f_2(c_2) = f(c_2) = 0.$$

Weil $f(1,0) \neq 0$ und $f(-1,0) \neq 0$, ist $c_2 \in D_2 \backslash D_1$.

Also hat f auf ∂D (mindestens) zwei Nullstellen.

3. a) Skizze von D:



b) D ist beschränkt und abgeschlossen, also kompakt, und f ist stetig, also nimmt f nach dem Satz von Weierstraß f (auf D) Maximum und Minimum an.

Wir suchen nun in D_1 und D_2 die Kandidaten für globale Extremstellen von f, und vergleichen anschließend die Funktionswerte der Kandidaten in einer Wertetabelle.

- <u>zu f auf D_1:</u>
  Wir parametrisieren die untere Seite D_1 durch

  $$\varphi : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (t,0).$$

  Die Funktionswerte von f auf D_1 sind dann gegeben durch

  $$h(t) := f(\varphi(t)) = f(t,0) = t \cdot (0+1) = t, \quad t \in [-1,1].$$

Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von h auf $[-1,1]$ sind also $\quad t=-1, \quad 1.$

$\Longrightarrow$ Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von f auf D_1 sind also

$$(x,y) = \underbrace{(-1,0)}_{\varphi(-1)}\ ,\ \underbrace{(1,0)}_{\varphi(1)}.$$

- <u>zu f auf D_2:</u>
  Wir parametrisieren den Halbkreisbogen D_2 durch

  $$\varphi : [0,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (\cos t, \sin t).$$

  Die Funktionswerte von f auf D_2 sind dann gegeben durch

  $$h(t) := f(\varphi(t)) = f(\cos t, \sin t) = \cos t \cdot (\sin t + 1) = \cos t \cdot \sin t + \cos t, \quad t \in [0,\pi].$$

  h ist differenzierbar mit

  $$h'(t) = -\sin^2 t + \cos^2 t - \sin t \overset{\cos^2 t = 1 - \sin^2 t}{=} -2\sin^2 t + 1 - \sin t = -2u^2 - u + 1,$$

  mit $u := \sin t$. Es ist

  $$-2u^2 - u + 1 = 0 \iff u_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{-4} = \frac{1 \pm 3}{-4} \iff u_1 = -1,\ u_2 = \frac{1}{2}.$$

  Damit ist

  $$h'(t) = 0 \iff \underbrace{\sin t = -1}_{\text{nicht möglich für } t\in[0,\pi]} \vee \sin t = \frac{1}{2} \overset{t\in[0,\pi]}{\iff} t = \frac{\pi}{6} \equiv 30^\circ \vee t = \frac{5\pi}{6} \equiv 150^\circ.$$

  Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von h sind also $\quad t = 0, \quad \frac{\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \pi.$

  $\Longrightarrow$ Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von f auf D_2 sind also

  $$(x,y) = \underbrace{(1,0)}_{\varphi(0)}\ ,\ \underbrace{(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})}_{\varphi(\frac{\pi}{6})}\ ,\ \underbrace{(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})}_{\varphi(\frac{5\pi}{6})}\ ,\ \underbrace{(-1,0)}_{\varphi(\pi)}$$

- <u>Wir vergleichen $f(x,y)$ für die Kandidaten:</u>
  Mit Hilfe der Wertetabelle

(x,y)	$(1,0)$	$(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$	$(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$	$(-1,0)$
$f(x,y)$	1	$\underbrace{\frac{3}{4}\sqrt{3}}_{>1}$	$\underbrace{-\frac{3}{4}\sqrt{3}}_{<-1}$	-1

  erkennt man, daß $(-\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ die einzige (globale) Minimalstelle von f [mit Wert $-\frac{3}{4}\sqrt{3} \approx -1.3$], und $(\frac{1}{2}\sqrt{3}, \frac{1}{2})$ die einzige (globale) Maximalstelle von f [mit Wert $\frac{3}{4}\sqrt{3} \approx 1.3$] ist.

4. Wir zerlegen, wie im Beipiel aus der Vorlesung, D in Kurven

   $$X_c := \{(x,y) \in D |\ x + y = c\}, \quad c \geq 0,$$

   bestimmen das Maximum von f <u>auf X_c</u> und bilden dann das Supremum (Maximum) der Kurvenmaxima.

Sei nun $c > 0$. Wir parametrisieren X_c für $c > 0$ durch

$$\varphi : [0, c] \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t) = (t, c-t).$$

Die Funktionswerte von f auf X_c sind dann gegeben durch

$$h(t) := f(\varphi(t)) = f(t, c-t) \;=\; e^{-c} \cdot (t(c-t) + t + c - t + 1) = e^{-c} \cdot (-t^2 + tc + c + 1), \quad t \in [0, c].$$

h ist differenzierbar mit

$$h'(t) = e^{-c} \cdot (-2t + c) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad t = \frac{c}{2}.$$

Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von h auf $[0, c]$ sind also $t = 0, \ \frac{c}{2}, \ c$.
$\Longrightarrow$ Die einzigen Kandidaten für Extremstellen von f auf X_c sind also

$$(x, y) = \underbrace{(0, c)}_{\varphi(0)} \;,\; \underbrace{\left(\frac{c}{2}, \frac{c}{2}\right)}_{\varphi(\frac{c}{2})} \;,\; \underbrace{(c, 0)}_{\varphi(c)}.$$

Aus der folgenden Tabelle

(x,y)	$(0,c)$	$(\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$	$(c,0)$
$f(x,y)$	$e^{-c}(c+1)$	$e^{-c}(\frac{c^2}{4} + c + 1)$	$e^{-c}(c+1)$

erkennt man, daß f auf X_c (nur) im Punkt $(\frac{c}{2}, \frac{c}{2})$ den Maximalwert $e^{-c}(\frac{c^2}{4} + c + 1)$ annimmt.
Wir betrachten nun also die Funktion

$$M : [0, \infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad M(c) = e^{-c}\Big(\frac{c^2}{4} + c + 1\Big).$$

Diese Funktion beschreibt das Maximum von f auf X_c; für $c = 0$ ist $X_0 = \{(0, 0)\}$ und $M(0) = f(0, 0)$.
M ist differenzierbar und wegen

$$\begin{aligned} M'(c) &= -e^{-c}\Big(\frac{c^2}{4} + c + 1\Big) + e^{-c}\Big(\frac{1}{2}c + 1\Big) \\ &= e^{-c}\Big(-\frac{c^2}{4} - c - 1 + \frac{c}{2} + 1\Big) = e^{-c}\Big(-\frac{c^2}{4} - \frac{c}{2}\Big) < 0 \quad \text{für } c > 0 \end{aligned}$$

streng monoton fallend, nimmt also (nur) in $c = 0$ den Maximalwert $M(0) = 1$ an. Damit nimmt f auf D (nur) im Punkt $(0, 0)$ den Maximalwert $f(0, 0) = 1$ an, f hat also ein globales Maximum (was nicht selbstverständlich ist, da D nicht kompakt ist), angenommen im Punkt $(0, 0)$.

f hat jedoch **kein** globales Minimum, denn es ist

$$f(x, y) = \underbrace{e^{-(x+y)}}_{>0} \cdot \underbrace{(xy + x + y + 1)}_{\geq 1} > 0 \qquad \text{für alle } (x, y) \in D$$

und es gilt (wir schauen uns die Funktionswerte auf der x-Achse für $x \to \infty$ an:)

$$\lim_{x\to\infty} f(x, 0) = \lim_{x\to\infty} e^{-x}(x + 1) = \lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{e^x} \overset{\text{„}\frac{\infty}{\infty}\text{“}}{\underset{\text{l'H}}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

Die folgende Skizze zeigt den Graphen der Funktion f: